

# 钢球传递载荷的接触应力接触变形分析与计算

中国运载火箭技术研究院第七零二研究所 刘九卿

【摘要】本文在介绍双剪梁型称重传感器结构与力学特点的基础上，分析了采用钢球传递载荷时，钢球与弹性元件上球座的接触区域、接触变形的力学特点，推导出接触应力、接触变形、接触圆半径的理论计算公式，并给出接触圆半径的实际测量结果。

【关键词】称重传感器；钢球；球座；接触应力；接触变形；接触圆半径

## 一、概述

从 20 世纪 80 年代中期开始直至今日，双剪梁型称重传感器在我国电子汽车衡产品中得到比较广泛的应用。双剪梁型称重传感器由双剪切应变梁、支撑底座、高强度双端固定螺钉、传递载荷的钢球和压头等构成。其结构简图如图 1 所示，工字形应变区的切应力分布图如图 2 所示。

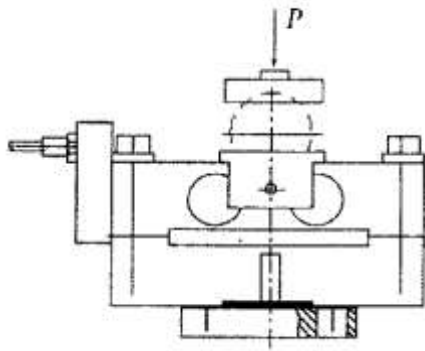


图 1 双剪梁型称重传感器结构简图

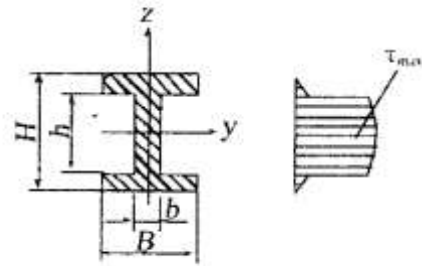


图 2 工字型应变区切应力分布图

钢球传递载荷的双剪梁型称重传感器具有如下特点：

- (1) 双剪梁弹性元件所承受的剪力沿长度方向为一常量，称重传感器的输出只与此剪力产生的剪应力有关，因此输出对载荷作用点的变化不敏感，抗侧向、偏心载荷的能力强。

(2) 由于工字梁腹板上中心轴处的应力单元为纯剪切状态，在承载过程中受剪的横截面面积不发生变化，各电阻应变计产生基本相同的电阻变化，固有线性好，称重传感器容易达到较高的准确度等级。

(3) 因为工字形截面的剪应力分布比较均匀，双剪切电阻应变计粘贴在四个盲孔内的最小寄生应力区，提高了各项抗干扰能力，不但使电阻应变计得到很好的保护，而且也便于防护与密封。

(4) 采用钢球与球座传递载荷，是双剪梁型称重传感器的最大特点。因为被称量的载重汽车驶上电子汽车衡时，承载器纵向、横向都有不同程度的摆动，而使钢球在双剪梁弹性元件的球座内滚动，因为钢球只感受、传递垂直方向的载荷，不感受、不传递横向载荷和横向扭转力矩，所以能使承载器摆动后很快恢复原位，保证电子汽车衡具有较高的称量准确度。

采用钢球传递载荷时，由于钢球具有只感受、传递轴向载荷，不感受、不传递横向载荷的特点，使其在电子衡器用各种结构的称重传感器上得到比较广泛的应用。因此在选择、设计称重传感器弹性元件结构时，除必须满足应变区的应力、应变量子要求外，传递载荷的钢球与球座的尺寸、金属材料、硬度、加工精度等都是必须认真考虑的重要参数。为了得到钢球与球座最佳传递载荷的效果，还必须对钢球与球座的接触应力、接触变形、接触圆大小进行分析与计算。

## 二、钢球与球座的接触应力与接触变形分析

双剪梁型称重传感器传递载荷的钢球与双剪梁弹性元件上球座的接触，是形状简单元件典型的接触问题，即古典接触问题。通常在解古典接触问题时，只限于分析接触区的接触应力及接触变形。钢球与双剪梁弹性元件上球座的接触简图如图 3 所示，钢球与球座接触圆的圆面积示意图如图 4 所示。

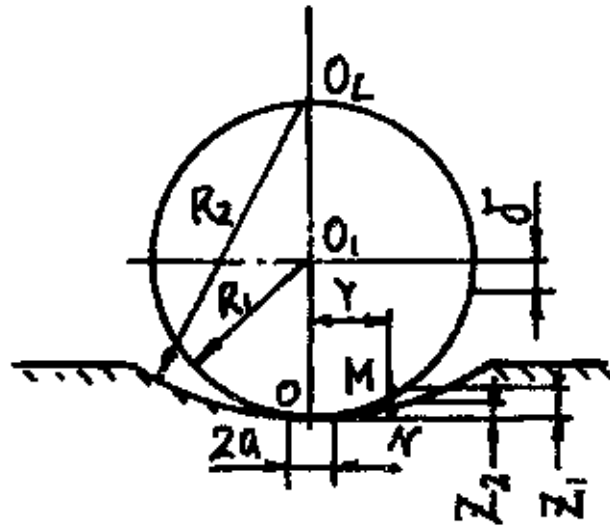


图 3 钢球与球座接触面简图

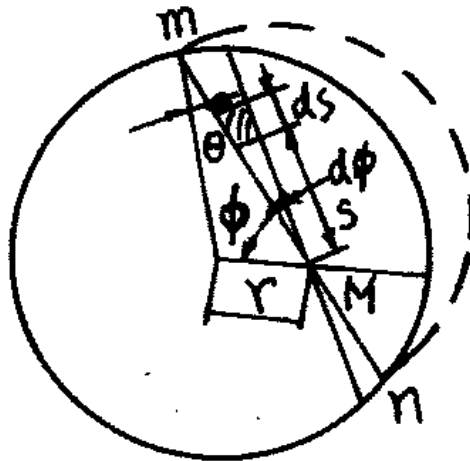


图 4 钢球与球座接触圆的圆面积示意图

钢球与球座的接触问题比较复杂，一般多根据钢球与球座接触变形应符合的几何变形条件；钢球、球座的垂直变形与接触面分布力间的关系式，即物理条件；由接触表面压应力变化规律求得的表面接触压力所组成的合力应等于所加外载荷的静力平衡条件来求解。

设钢球与球座的半径分别为  $R_1$ 、 $R_2$ ，所用金属材料的弹性模量分别为  $E_1$ 、 $E_2$ ，金属材料的泊松比分别为  $\mu_1$ 、 $\mu_2$ 。

钢球与球座开始接触时，因没有施加载荷，钢球与球座没有相压，只在 O 点有接触。任意选择钢球上的点 M，球座上的点 N，点 M 和点 N 到钢球与球座切平面的距离分别为  $Z_1$ 、 $Z_2$ ，到加载轴线的距离为  $r$ 。因  $r$  比  $R_1$ 、 $R_2$  小得多，所以  $Z_1$ 、 $Z_2$  可近似的表示为：

$$Z_1 = \frac{r^2}{2R_1} \quad , \quad Z_2 = \frac{r^2}{2R_2} \quad (1)$$

点 M 与点 N 的距离为：

$$Z_1 - Z_2 = \frac{r^2}{2} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{r^2(R_2 - R_1)}{2R_1R_2}$$

令 
$$\beta = \frac{R_2 - R_1}{2R_1R_2}$$

$\beta$  为由  $R_1$ 、 $R_2$  确定的常数。

则 
$$Z_1 - Z_2 = \beta r^2 \quad (2)$$

当钢球承受垂直载荷  $P$  作用与球座相压时，则在球座接触处产生局部变形，形成一个小的圆形接触面，其接触半径为  $a$ 。

设  $\omega_1$ 、 $\omega_2$  分别为球面上点 M，球座上点 N 由于局部变形产生的沿  $Z$  方向的位移。钢球与球座彼此移近的距离为  $\delta$ ，则

$$\delta = Z_1 - Z_2 + \omega_1 + \omega_2$$

$$\omega_1 + \omega_2 = \delta - (Z_1 - Z_2) = \delta - \beta r^2 \quad (3)$$

式 (3) 就是钢球与球座接触的几何变形条件。

由对称性可知，钢球与球座相压时，接触面上的压应力  $q$  和位移  $\omega$  对于接触面中心 O 都是对称的。

取图 4 所示的圆面积作为接触面，其中 M 点是接触面上属于钢球的一点。在小变形时，可将球体近似的作为弹性半空间体。

利用圆面积内受均布载荷时，在圆面积外一点的下沉位移公式，对球有：

$$\begin{aligned}
 d\omega_1 &= \frac{1 - \mu_1^2}{\pi E_1} \cdot \frac{dP}{s} \\
 &= \frac{1 - \mu_1^2}{\pi E_1} \cdot \frac{q ds \cdot s d\varphi}{s} \\
 &= \frac{1 - \mu_1^2}{\pi E_1} q ds d\varphi
 \end{aligned}$$

式中  $q$ —接触面上的压力。

对球面有：

$$\omega_1 = \int d\omega_1 = \frac{1 - \mu_1^2}{\pi E_1} \iint q ds d\varphi \quad (4)$$

同理对球座有：

$$\omega_2 = \frac{1 - \mu_2^2}{\pi E_2} \iint q ds d\varphi \quad (5)$$

上述位移均为钢球与球座接触的物理条件。

将式 (4)、(5) 代入式 (3)，得

$$\left( \frac{1 - \mu_1^2}{\pi E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{\pi E_2} \right) \iint q ds d\varphi = \delta - \beta r^2 \quad (6)$$

利用对称性和变形规律可知，压应力  $P(r)$  在接触面中心为最大，假定接触圆面上压力分布  $q(r)$ ，是在接触圆面上作出以  $a$  为半径的半球面的纵坐标表示。

图 4 中  $mn$  弦上压力  $q(r)$  的变化是以虚线半圆形表达，设比例常数为  $K$ ，则接触圆中心  $O$  的压力  $q_0$  为：

$$q_0 = Ka$$

将接触压力  $q$  沿弦  $mn$  进行积分，则

$$\int q ds = \frac{q_0}{a} F$$

式中  $F$ —图中用虚线表示的半圆面积。

由于  $mn = 2\sqrt{a^2 - r^2 \sin^2 \varphi}$

所以  $F = \frac{\pi}{2}(a^2 - r^2 \sin^2 \varphi)$

于是 
$$\int q ds = \frac{\pi q_0}{2a} (a^2 - r^2 \sin^2 \varphi) \quad (7)$$

将式 (6) 代入式 (7) 得

$$\left( \frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2} \right) \frac{q_0}{2a} \int_0^\pi (a^2 - r^2 \sin^2 \varphi) d\varphi = \delta - \beta r^2$$

$$\left( \frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2} \right) \frac{q_0}{a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a^2 - r^2 \sin^2 \varphi) d\varphi = \delta - \beta r^2$$

$$\left( \frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2} \right) \frac{\pi q_0}{4a} (2a^2 - r^2) = \delta - \beta r^2$$

对于  $r$  的任何值，此方程都是适用的，因此有：

$$\delta = \left( \frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2} \right) q_0 \frac{\pi a}{2} \quad (8)$$

$$\beta = \left( \frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2} \right) q_0 \frac{\pi}{4a} \quad (9)$$

式 (8)、式 (9) 两式中包括  $q_0$ 、 $a$ 、 $\delta$  三个未知量，所以不能求解，必须补充以下静力平衡条件，即接触面上压力的总和应等于外加载荷  $P$ ，利用以上所假设的压力分布规律可得：

$$\iint q dF = K \frac{1}{2} \left( \frac{4}{3} \pi a^3 \right) = \frac{q_0}{a} \cdot \frac{2}{3} \pi a^3 = P$$

所以

$$q_0 = \frac{3P}{2\pi a^2} \quad (10)$$

从式 (10) 中可以明显的看出，最大压应力  $q_0$  是接触面上平均压应力的 1.5 倍。

解以上关系式 (8)、(9)、(10)，并将  $\beta = \frac{R_2 - R_1}{2R_1 R_2}$  代入后，得

接触圆半径：

$$a = \sqrt[3]{\frac{3}{4} \cdot \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \left( \frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2} \right) P}$$

$$=0.9086 \sqrt[3]{\frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}} \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{1 - \mu_1^2}{E_1} - \frac{1 - \mu_2^2}{E_2}\right) P} \quad (11)$$

接触变形:

$$\begin{aligned} \delta &= \sqrt[3]{\frac{9}{16} \cdot \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}} \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2}\right)^2 P^2} \\ &= 0.8255 \sqrt[3]{\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}} \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2}\right)^2 P^2} \end{aligned} \quad (12)$$

最大接触应力:

$$\begin{aligned} q_0 &= \sqrt[3]{\frac{6}{\pi^3} \left(\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}\right)^2 \frac{P}{\left(\frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2}\right)^2}} \\ &= 0.5784 \sqrt[3]{\left(\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}\right)^2 \frac{P}{\left(\frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2}\right)^2}} \end{aligned} \quad (13)$$

钢球与球座接触面的最大压应力在接触圆中心处 ( $r=0, Z=0$ ), 即

$$\sigma_z = q_0$$

该点另外两个主应力  $\sigma_r$  和  $\sigma_\theta$  都是相同的压应力, 其值为:

$$\sigma_z = \sigma_\theta = \frac{1+2\mu}{2} q_0 \quad (14)$$

与弹性元件材料屈服有关的最大剪应力在该点的值比较小, 经计算最大剪应力的位置在中心线内, 深度近似为  $0.47a$  处的点上, 是静载荷作用时的最弱点。

当  $\mu=0.3$  时, 这一点的最大剪应力为:

$$\tau_{\max} = 0.31 q_0 \quad (15)$$

从以上分析和推导的公式不难看出:

(1) 最大接触应力  $q_0$  与载荷  $P$  的立方根成正比, 接触面上最大压应力的增长较载荷的增长慢, 形成了应力与载荷的非线性关系。

(2) 因钢球与球座接触面积的大小与钢球和球座的弹性变形有关, 所以接触应力与钢球和球座所用金属材料的弹性模量  $E$ 、泊松比  $\mu$  有关。

(3) 当载荷 P 没有施加到钢球与球座上时，钢球与球座是点接触，随着载荷的增加钢球与球座的接触面积将不断增大，即使在材料的弹性范围内，载荷 P 与接触圆半径 a、接触变形  $\delta$  的关系也是非线性的。

钢球与球座的接触问题，最大的特点是在接触区内出现相当高的应力，特别是在初始接触的情况下应力更高，但它有非常明显的局部应力性质。对于只产生压应力的特殊接触区来讲，尽管局部压应力很大，甚至达到材料的屈服极限，也只不过在这个局部发生塑性变形，由于没有拉应力，所以不可能发生断裂或破坏。因此，钢球与球座相接触时，其接触区局部发生塑性变形是完全允许的，不会影响称重传感器正常工作。

### 三、钢球与球座的接触应力与接触变形计算

双剪梁型称重传感器的双剪切应变梁弹性元件，多选用强度和弹性极限高，热处理后残余变形小，综合性能好的 40CrNiMoA 优质合金结构钢，传递载荷的钢球选用耐磨性和淬透性良好的 GCr15 轴承钢。两种材料的力学性能如下：

40CrNiMoA	$\sigma_b=108\sim 131 \text{ kg/mm}^2$
	$\sigma_s=98\sim 113 \text{ kg/mm}^2$
	$E_2=2.04\times 10^4 \text{ kg/mm}^2$
	$\mu_2=0.3$
GCr15	HRC 60~62
	$E_1=2.10\times 10^4 \text{ kg/mm}^2$
	$\mu_1=0.3$

以量程为  $P=25000\text{kg}$  双剪梁称重传感器为例，利用双剪切梁弹性元件的计算结果和上述公式进行接触应力、接触变形计算。



在双剪梁弹性元件即应变梁的两个拐点处，对称的加工出四个盲孔，在局部形成工字梁，这就是粘贴电阻应变计的应变区。双剪梁弹性元件的力学模型、剪力、弯曲力矩分布、电阻应变计粘贴位置如图 5 所示。

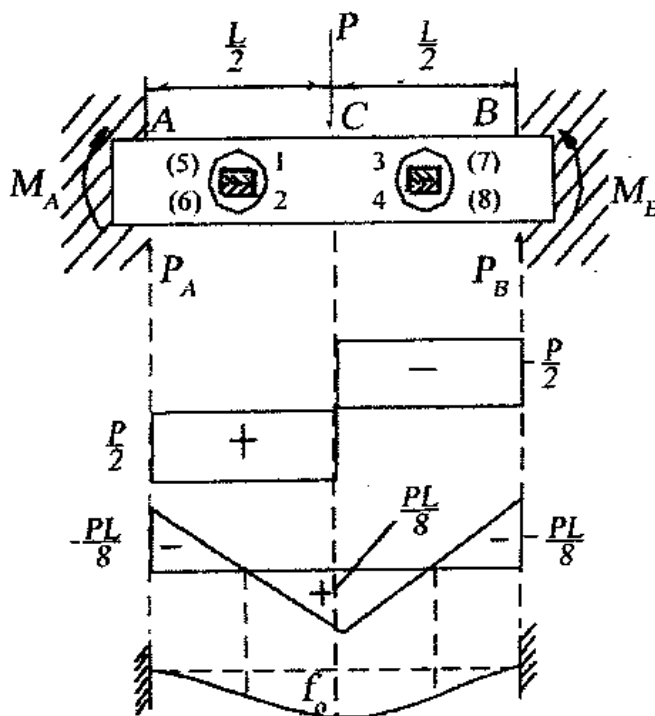


图 5 双剪梁弹性元件的力学模型及应力、应变分布图

承受  $P=25000\text{kg}$  载荷的双剪梁弹性元件，各项应力、应变计算结果如下：

剪力	$Q = \frac{P}{2} = 12500 \text{ kg}$
最大剪应力及剪应变	$\tau_{\max} = 20.683 \text{ kg/mm}^2$ $\gamma_{\max} = 2561 \times 10^{-6}$
$45^\circ$ 方向主应力及主应变	$\sigma_{45}^0 = \pm 20.683 \text{ kg/mm}^2$ $\varepsilon_{45}^0 = \pm 1280 \times 10^{-6}$
最大弯曲应力及弯曲应变	$\sigma_{\max} = 24.766 \text{ kg/mm}^2$ $\varepsilon_{\max} = 1179 \times 10^{-6}$
最大挠度	$f_c = 0.0756 \text{ mm}$

输出灵敏度

S=2.562 mv/v

### 1.接触圆半径

$$\begin{aligned} a &= 0.9086 \sqrt[3]{\frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}} \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{1 - \mu_1^2}{E_1} - \frac{1 - \mu_2^2}{E_2}\right) P} \\ &= 0.9086 \sqrt[3]{\frac{38.1 \times 76}{76 - 38.1}} \times \sqrt[3]{\left(\frac{1 - 0.3^2}{2.1 \times 10^4} + \frac{1 - 0.3^2}{2.04 \times 10^4}\right) \times 25000} = 5.013 \text{ mm} \end{aligned}$$

### 2.接触变形

$$\begin{aligned} \delta &= 0.8255 \sqrt[3]{\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}} \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2}\right)^2 P^2} \\ &= 0.8255 \sqrt[3]{\frac{76 - 38.1}{38.1 \times 76}} \times \sqrt[3]{\left(\frac{1 - 0.3^2}{2.1 \times 10^4} + \frac{1 - 0.3^2}{2.04 \times 10^4}\right)^2 \times 25000^2} = 0.328 \text{ mm} \end{aligned}$$

### 3.接触应力

$$\begin{aligned} q_0 &= 0.5784 \sqrt[3]{\left(\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}\right)^2 \times \frac{P}{\left(\frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2}\right)^2}} \\ &= 0.5784 \sqrt[3]{\left(\frac{76 - 38.1}{38.1 \times 76}\right)^2 \times \frac{25000}{\left(\frac{1 - 0.3^2}{2.1 \times 10^4} + \frac{1 - 0.3^2}{2.04 \times 10^4}\right)^2}} = 427.909 \text{ kg/mm}^2 \end{aligned}$$

### 4.其它两个受压分析的主应力

因为钢球与球座接触点处为三向受压的应力状态，另外两个主应力为：

$$\sigma_r = \sigma_\theta = \frac{1 + 2\mu}{2} q_0 = \frac{1 + 2 \times 0.3}{2} \times 427.909 = 342.327 \text{ kg/mm}^2$$

### 5.最大剪应力

在中心线内深度为 0.47a 处的最大剪应力为：

$$\tau_{\max} = 0.31 q_0 = 146.602 \text{ kg/mm}^2$$

由于钢球传递载荷时，钢球与球座的接触点处于三向受压的应力状态，因此

能够承受这样高的应力，而不影响载荷传递和测量的准确度。

#### 6.接触圆半径实测验证

取两只新组装的双剪梁型称重传感器，在力标准机上施加  $P=25000\text{kg}$  载荷，加载、卸载三次后，测量球座上的接触圆半径分别为  $5.10\text{mm}$  和  $5.15\text{mm}$ ，与理论计算结果  $5.013\text{mm}$  的误差为  $2\%$ 左右，证明双剪梁型称重传感器钢球与球座接触问题的理论计算公式是可用的。

#### 四、结束语

一般在确定两个接触物体的破坏条件时，不是简单的以一点处的应力状态为准则，而是以两个接触物体间的极限塑性变形为准则。这个极限值也只能是根据对两个接触物体正常工作的要求作人为的规定，没有一个明确的物理界限，这是因为在载荷与塑性变形间并无明显的质变点。对双剪梁称重传感器而言，尽管钢球与球座的接触应力很高，球座上有一半径为  $5.013\text{mm}$  的接触圆压痕，局部发生了塑性变形，但对于此三向受压的特殊接触区来讲，完全承受得了而不影响载荷传递和测量准确度，保证双剪梁型称重传感器能够正常工作。一般传递载荷的钢球应具有较高的表面强度和表面硬度，在与球座接触传递载荷过程中应产生较小的接触变形，这对钢球准确复位对中，保证称重传感器的测量准确度都是有利的。

#### 参考文献

- 【1】 美国 BLH 公司.称重传感器相关资料，1986 年。
- 【2】 И.А.Бйргер（前苏联）.机械零件强度计算手册，1989 年。
- 【3】 黄炎.局部应力及其应用，机械工业出版社，1986 年。